

Bab 5 : Persamaan Parametrik & Koordinat Kutub

► 5.1 Persamaan Parametrik

Persamaan parametrik merupakan suatu persamaan yang menginterpretasikan gerak suatu partikel sepanjang kurva C dalam bidang $-xy$.

$$x = f(t) \text{ dan } y = g(t)$$

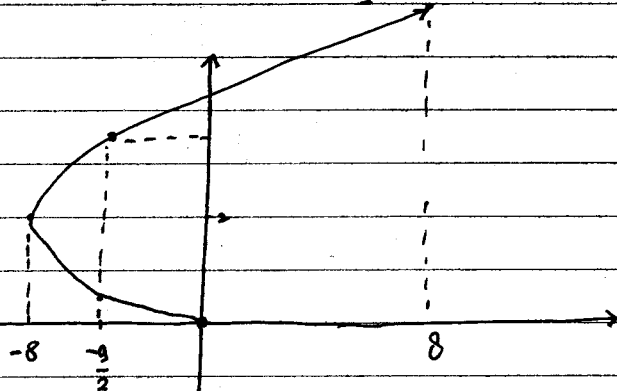
pada persamaan tersebut, variabel t disebut sebagai parameter dan persamaannya dinamakan persamaan parametrik. Biasanya t dibatasi bergerak dari a sampai b .

* Contoh : Sketsa trayektori selang $0 \leq t \leq 4$ dengan persamaan gerak :

$$x = \frac{1}{2}t^3 - 6t, \quad y = \frac{1}{2}t^2$$

Hasil sketsa :

t	0	1	2	3	4
x	0	$-\frac{11}{2}$	-8	$-\frac{9}{2}$	8
y	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8



► Eliminasi Parameter

Dengan eliminasi parameter, dapat diketahui hubungan antara variabel utama x dan y .

* Contoh :

Diketahui persamaan parametrik :

$$x = 2 + 3t$$

$$y = 1 + 6t$$

① Tentukan t dari salah satu persamaan

$$x = 2 + 3t$$

$$3t = x - 2$$

$$t = \frac{x-2}{3}$$

② Substitusi t ke persamaan lainnya.

$$y = 1 + 6t$$

$$y = 1 + 6t$$

$$= 1 + 6 \left[\frac{x-2}{3} \right]$$

$$= 1 + 2(x-2)$$

$$= 1 + 2x - 4$$

$$y = 2x - 3$$

► Mengubah grafik $y = f(x)$ dan $x = g(y)$ dalam Persamaan Parametrik.

Konsep : bunakan suatu parameter t sebagai variabel bebasnya

* Contoh : $y = 4x^2 - 1$; $x = 5y^3 - y$

⊛ Definisikan t pada salah satu persamaan

$$① x = t \rightarrow y = 4t^2 - 1$$

$$② y = t \rightarrow x = 5t^3 - t$$

► Panjang Busur Kurva Parametrik

Teorema 5.1.1 .

Terdapat persamaan parametrik :

$$x = x(t) ; \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

maka panjang busur kurvanya adalah :

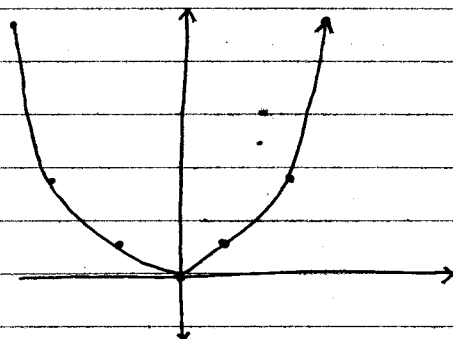
$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

► Soal-Soal Latihan 5.1

1). (a). Buatlah sketsa $x = t$, $y = t^2$ dengan membuat plot $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

(b). Tunjukkan bahwa kurva tersebut adalah parabola dengan eliminasi t

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



b. $x = t \rightarrow y = x^2$, merupakan kurva parabola.

1► 5.2 Koordinat Kutub

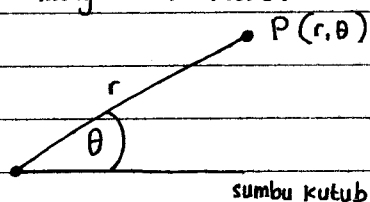
Suatu titik P dalam koordinat kutub, dinyatakan :

$$P(r, \theta)$$

dengan r : Koordinat radial

θ : Koordinat angular (sudut)

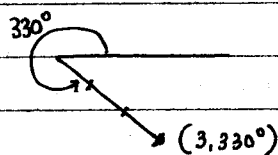
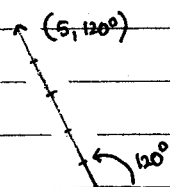
* Contoh menyatakan Koordinat Kutub



Jadi, masing-masing nilai r dan θ menyatakan :

• r = Panjang / jarak titik pusat menuju titik

• θ = besar sudut yang mengapit garis r dengan sumbu kutub.



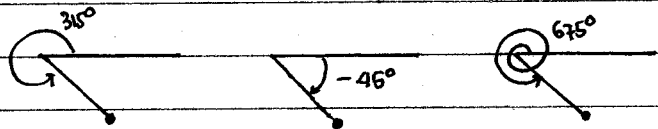
* Catatan : Koordinat kutub dari setiap titik

TIDAK TUNGGAL.

Semua titik bisa dinyatakan dalam BEBERAPA bentuk koordinat kutub.

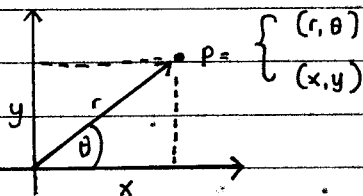
$$P = (r, \theta \pm n \cdot 360^\circ)$$

► Contoh : $(1, 315^\circ), (1, -45^\circ), (1, 675^\circ)$



► Hubungan Antara Koordinat Kutub dengan Koordinat Siku-Siku

Hubungan antara kedua koordinat tersebut bermanfaat dalam menentukan titik dalam koordinat kutub.



Hubungan x, y, r , dan θ :

$$x = r \cos \theta$$

► Contoh Soal

Dapatkan koordinat siku-siku dari :

$$3.) a). (6, \pi/6)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$= 6 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 6 \cos 30^\circ$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$= 6 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 6 \sin 30^\circ$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 3$$

$$\text{Titik : } (3\sqrt{3}, 3)$$

$$d). (5, 0)$$

$$x = 5 \cos 0$$

$$= 5$$

$$y = 5 \sin 0$$

$$= 0$$

$$\text{Titik : } (5, 0)$$

Dapatkan koordinat kutub dengan $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$

$$(a) (-5, 0)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$= (-5)^2 + (0)^2$$

$$= 25$$

$$r = 5$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-5} = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$y = r \sin \theta \rightarrow 0 = 5 \sin \theta$$

$$\theta = 0$$

$$x = r \cos \theta \rightarrow -5 = 5 \cos \theta$$

$$-1 = \cos \theta$$

Artinya θ berada pada $\cos \theta = -1$ dan $\sin \theta = 0$

$$\theta = 180^\circ$$

$$\text{Titik} = (5, 180^\circ) = (5, \pi)$$

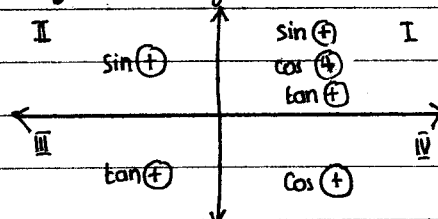
* Catatan : Untuk menentukan sudut, tidak cukup

hanya dengan menggunakan $\tan \theta$,

karena $\tan$ punya periode 180° , sementara

θ ada pada rentang $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

* Review nilai trigonometri



► Latihan Soal

$$3). b, c, h$$

$$4). b, d, e$$

► Grafik dalam Koordinat Kutub.

■ Garis dalam Koordinat Kutub

Diketahui bahwa $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, lalu apabila disubstitusikan pada persamaan umum garis $Ax + By + C = 0$, maka diperoleh :

$$A \cdot r \cos \theta + B \cdot r \sin \theta + C = 0$$

$$r(A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$$

Contoh : $r \cos \theta = 3$; $r \sin \theta = -2$, ...

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$x = 3 \qquad \qquad y = -2$$

■ Lingkaran dalam Koordinat Kutub

Suatu lingkaran berjari-jari a yang berpusat di titik asal memuat semua titik $P(a, \theta)$. Maka, karena dalam $P(r, \theta)$, r adalah jari-jari, maka :

$$r = a$$

↳ terbentuk lingkaran berjari-jari a .

* Persamaan lingkaran yang berpusat di sumbu- x dan melalui titik pusat

$$r = 2a \cos \theta \quad \text{atau} \quad r = -2a \cos \theta$$

dengan a adalah jari-jari lingkaran.

* Persamaan lingkaran berjari-jari a yang berpusat di sumbu- y dan melalui titik pusat

$$r = 2a \sin \theta \quad \text{atau} \quad r = -2a \sin \theta$$

■ Kardioida dan Limacon

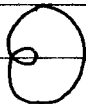
$$r = a \pm b \cos \theta$$

$$r = a \pm b \sin \theta$$

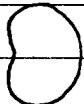
* Catatan : Representasi bentuk & hubungan a, b



$$a/b < 1$$



$$a/b = 1$$

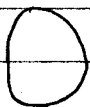


$$1 < \frac{a}{b} < 2$$

Limacon dengan bun dalam dalam

Kardioida

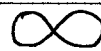
limaçon cekung



$$\frac{a}{b} > 2$$

limaçon cembung

■ Lemniscate



Jika $a > 0$,

$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$$

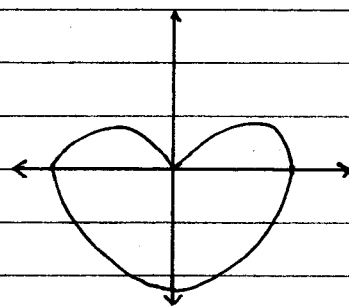
$$r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$$

Dan terdapat beberapa persamaan lainnya.

■ Latihan Soal

1). (e). $r = 3(1 - \sin \theta)$

$$r = 3 - 3 \sin \theta$$



Limaçon

Cara : Substitusi $\theta = 0$, dan beberapa theta dari sudut istimewa, lalu hubungkan

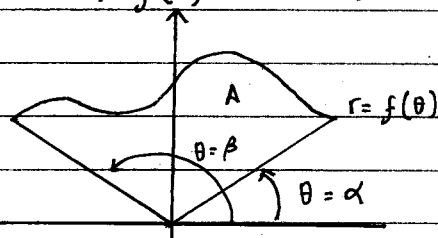
1). f, h, p, q

2). a

► 5.4 Luas dan Volume dalam Koordinat Kutub

■ Konsep Luas dalam Koordinat Kutub

Terdapat kurva $r = f(\theta)$ dibatasi $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

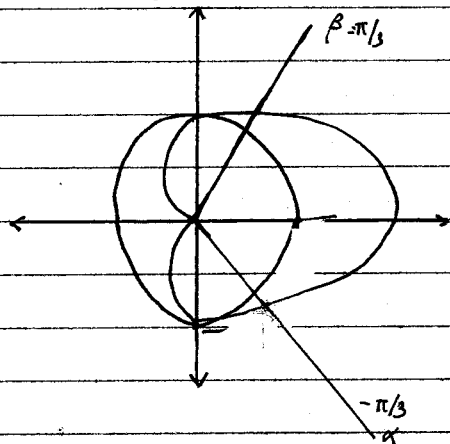
Dalam koordinat kutub, daerah luasan akan dibagi dalam "irisan-irisan" dengan membongkar garis radial r

$$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_{n-1}$$

dengan :

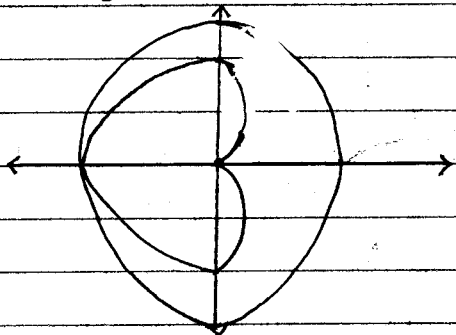
$$\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \beta$$

Contoh kasus : terdapat 2 luasan :



Contoh Soal

Dapatkan luas di luar kardioida $r = 2 - 2\cos\theta$ dan di dalam lingkaran $r = 4$



$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [4^2 - (2 - 2\cos\theta)^2] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16 - (4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 12 + 8\cos\theta - 4\cos^2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} 12 d\theta + 8 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad 12 \int_0^{2\pi} d\theta &= 12 [2\pi] \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

$$* \quad 8 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 8 [\sin\theta]_0^{2\pi}$$

$$* \quad 4 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} d\theta$$

$$= 2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \right]$$

$$= 4 [0 + \pi]$$

$$= 4\pi$$

$$L = \frac{1}{2} [24\pi - 4\pi]$$

$$= 10\pi$$